Eduardo CURVELLO*

Comentários sobre a Geometria não Euclidiana

Resumo

Durante vários séculos, acreditou-se que a geometria elementar teria alcançado um desejável grau de progresso com o livro *Elementos da Geometria*, de Euclides, e que, exceto algumas adaptações, este trabalho era definitivo. Contudo, alguns matemáticos do século XIX romperam com esta visão absoluta da geometria e entenderam que esta, assim como outros ramos da matemática, é consequência de uma estrutura axiomática e que, portanto, é possível edificar a geometria desvinculada da representação do mundo físico.

Neste comentário, quero enfatizar dois aspectos: de um lado, temos que as descobertas não são resultado de um trabalho individual e, por outro lado, não existe um conhecimento absoluto em Matemática.

Abstract

Throught many centuries it was believed that elemental geometry would have gotten a desirable grade of progress with the Euclides's book Elements of Geometry and that unless some adaptations, this work was definitive. Some mathematicians of XIX century have broken up with this absolute view of geometry and have understood that the Geometry as well as another blanches of Mathematics is a consequence of an axiomatic structure; therefore it's possible to construct the geometry disjointed from the physical world representation. We would like to emphasize in this comments two aspects: on the side, it's true that discoveries are not the result of an individual work, by another side, there isn't an absolute knowledge in Mathematics.

Introdução

A criação matemática mais importante do século XIX foi certamente a criação da geometria não euclidiana. A geometria não euclidiana foi importante tanto para o desenvolvimento matemático, como um ramo do conhecimento humano, assim com, por obrigar os matemáticos a revisarem seus conteúdos, preocupando-se com os fundamentos da matemática de um modo geral.

Não podemos esquecer que o século XIX foi marcado por um grande impulso na geometria projetiva, não que as duas áreas do conhecimento estejam diretamente relacionadas, mas ambas têm como base de estudo a geometria euclidiana.

Até aproximadamente 1800, todos os pensadores estavam convencidos de que a geometria euclidiana era um modelo ideal do espaço físico, de fato, muitos proclamaram a verdade absoluta da geometria euclidiana. Por exemplo: Isaac Barrow listou oito razões da clareza da geometria euclidiana:

- I) A clareza de seus conceitos.
- II) As definições não ambíguas.
- III) A conformidade com a intenção.
- IV) A facilidade de imaginar os postulados.
- V) O pequeno número de postulados.
- VI) A facilidade com que as grandezas são geradas.
- VII) O fácil encadeamento das demonstrações.
- VIII) A alusão às coisas demonstradas.

Barrow estava convencido de que a geometria euclidiana era o modelo de representação do espaço físico e isto ficou evidenciado quando foi responder a pergunta: como estamos seguros de que os princípios geométricos se aplicam à natureza?

* Doutorando em Lógica. Mestre em Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do curso de Sistemas de Informação das Faculdades Integradas "Campos Salles". Professor da FATEC-SP.

Sua resposta foi: “*estes princípios são derivados da razão inata. Os objetos sensíveis são unicamente os agentes que os despertam. Mas os princípios da geometria são confirmados mediante a experiência e continuará assim, porque o mundo desenhado por Deus é imutável. A geometria é, então, uma ciência perfeita e segura.*”

Os filósofos do século XVII e XVIII formularam perguntas questionando os fundamentos da física newtoniana, notavelmente Hobbes, Locke e Leibniz contestaram as leis matemáticas, Leibniz deixou certo espaço para a dúvida, quando distingue o mundo possível e o mundo real, porém o tratado mais importante desta época foi “*treatise of human nature*”, escrito em 1739 por David Hume, que negou a existência das leis necessárias dos eventos no universo e observou, se ocorressem seqüências de um determinado fenômeno, os seres humanos concluiriam que sempre ocorrerá da mesma forma tal fenômeno.

A influência de Hume foi negada e superada por Imanuel Kant. A resposta à pergunta de como podemos estar seguros de que a geometria euclidiana é o modelo do mundo físico é dada no seu tratado de 1781, chamado “*Crítica da Razão Pura*”. Neste tratado ele afirma que em nossa mente existe uma certa organização que chamou de intuição; o espaço e o tempo que a experiência absorve é organizado em nossa mente, segundo esta intuição. Nossa mente é de tal modo constituída que nos obriga a ver o mundo exterior de uma única maneira. E, em consequência, certos princípios acerca do espaço são anteriores à experiência. Estes princípios são consequências lógicas que Kant chamou de verdades sintéticas *a priori*, e uma destas verdades foi a geometria euclidiana. Conhecemos a natureza do mundo exterior na medida em que nossa mente nos obriga a interpretá-la. Com base nestas idéias, Kant afirmou que o mundo físico deveria ser euclidiano.

Origem da Geometria não euclidiana

Nenhum ramo da matemática é o resultado da criação de um único homem e a geometria não euclidiana não foi uma exceção. Se pensarmos

que o ponto de partida para a geometria não euclidiana está no fato da existência de outras geometrias alternativas, então Klügel e Lambert merecem ser citados. Um outro ponto de vista da origem da geometria não euclidiana pode ser analisado se modificarmos o 5º postulado de Euclides (dado um ponto e uma reta, existe uma única reta que passa pelo ponto e é paralela à reta dada), neste caso, o mérito se deve a Saccheri que procurou encontrar um axioma que substituiu o 5º postulado, sem modificar esta geometria. Contudo, o maior mérito deve ser atribuído aos matemáticos que entenderam que a geometria euclidiana não é uma representação do espaço físico *a priori*. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) teve esta compreensão.

Gauss publicou relativamente pouco, no caso da geometria não euclidiana, não publicou nenhum trabalho definitivo. Em uma carta enviada a Bessel, em 27 de janeiro de 1827, dizia que provavelmente nunca publicaria seus *avanços neste campo, pois temia ser ridicularizado, ou, como afirmou “temia o clamor dos beócios”*. Gauss pode ter sido demasiadamente cuidadoso, mas não podemos nos esquecer de que alguns matemáticos haviam alcançado gradualmente o cerne da geometria não euclidiana, embora o mundo intelectual seguisse os ensinamentos de Kant.

O que sabemos dos trabalhos de Gauss em geometria não euclidiana foi encontrado em algumas cartas enviadas para alguns amigos sobre as breves resenhas em “*Göttingische Gelehrte Anzeigen*” de 1816 a 1822 e também em algumas notas encontradas em papéis após seu falecimento.

Gauss estava convencido da impossibilidade de demonstrar o 5º postulado de Euclides e isto era bem conhecido em Göttingen. Kastner, professor de Gauss, estava familiarizado com a história das tentativas para demonstrar tal postulado. Em 1792, Gauss comentou a seu amigo Schumacher que poderia haver uma geometria lógica, na qual o postulado das paralelas poderia não existir. Em 17 de dezembro de 1799, Gauss escreveu a seu amigo Wolfgang Farkas Bolyai afirmando que, na tentativa de demonstrar o postulado das paralelas, acabou obtendo resulta-

dos que aos seus olhos nada provavam e que levou a duvidar da própria geometria.

A partir de 1813, Gauss desenvolveu sua geometria que primeiramente foi chamada anti-euclidiana, mais tarde de geometria astral e, finalmente geometria não euclidiana. Em uma carta a Olbers escrita em 1817, Gauss afirmou: *“estou convencido mais e mais de que a necessidade física da nossa geometria euclidiana não pode ser demonstrada, ao menos não pela razão. Talvez em outra vida sejamos capazes de obter uma visão da natureza do espaço, que até agora, não foi possível situar a geometria na mesma classe da aritmética, que é, puramente a priori, como a mecânica”*.

Para pôr em prática a aplicabilidade da geometria não euclidiana, Gauss foi medir de fato a soma dos ângulos de um triângulo formado por picos de três montanhas: Brocken, Hohehagen e Inselsberg. As medidas dos lados foram 69, 85 e 197 km, obtendo-se, assim, a soma dos ângulos internos deste triângulo igual a $180^\circ + (14,85)$, o que tornou impossível chegar a uma conclusão, porque o erro experimental era maior que o excesso obtido na leitura das medidas. Entretanto, como a soma poderia ter sido para menos, Gauss se deu conta que o triângulo era muito pequeno e que em geometria não euclidiana a falta é proporcional à área, de modo que um triângulo muitas vezes maior poderia revelar alguma diferença significativa sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Nikolai Ivanovick Lobatchevsky (1793-1856) e Janos Bolyais (1802-1860) são considerados os primeiros a publicarem artigos de geometria não euclidiana sobre uma base sintética, dedutiva, completa e logicamente tão legítima quanto a de Euclides.

Lobatchevsky estudou na Universidade de Kazan e de 1827 até 1846 foi professor. Apresentou seus trabalhos sobre geometria não euclidiana na revista de Kazan em 1829 e 1830 com o título “Sobre os Fundamentos da Geometria”. Em 1840, publicou um livro em alemão “Geometrische Untersuchungen zur Theorie Parallelinien (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas), que foi de

pouca repercussão na comunidade de matemáticos da época.

Janos Boyai, filho de Wolfgang Bolyai, escreveu um ensaio de 26 páginas que denominou de “A Ciência do Espaço Absoluto”, que foi publicado como apêndice do trabalho de seu pai “Tentament Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos” (Ensaio sobre os Elementos das Matemáticas para Jovens Estudiosos).

Conteúdo técnico da Geometria não euclidiana

A seguir, faremos um tratamento puramente informal de geometria não euclidiana e, por simplicidade, limitaremos ao plano.

Gauss, Lobatchevsky e Bolyai perceberam a possibilidade de demonstrar o 5º postulado de Euclides e, praticamente, os três fizeram a mesma coisa, como consta a seguir:

Postulado das paralelas de Lobatchevsky

Se P é um ponto não pertence à reta AB e Q é o pé da perpendicular tomado de P em relação a reta AB, existem duas semi-retas PX e PY por P que não estão na mesma reta e não interceptam AB e tal que a semi-reta PZ por P é interior ao ângulo XPY que contém PQ, intercepta AB. (Figura 1)

Teorema. Qualquer reta que passe pelo ponto P e não seja interior ao ângulo XPY que contém PQ não intercepta a reta AB.

Obs. Se tal reta interceptasse a reta AB, então PX e PY iriam interceptar a reta AB.

Definição. Chamaremos a semi-reta PX e PY da figura 1 de paralelas da reta AB pelo ponto P. A direção PX e PY é dita paralela a AB e BA, respectivamente. As retas que não são interiores ao ângulo XPY e que contêm PQ são denominadas hiperparalelas através de P da reta AB.

Teorema. Se Q é o pé da perpendicular do ponto P na reta AB e se PX e PY são paralelas através de P da reta AB, então os ângulos XPQ e YPQ são iguais.

Obs. Supondo que o ângulo YPQ > XPQ, então existe um ângulo MPQ onde MPQ = XPQ (Figura 2), então PQ toca internamente ao ângulo YPQ a reta AB no ponto N. Logo, os triângulos NPQ e KPQ são congruentes e os ângulos KPQ, MPQ e XPQ são iguais. Assim, PX e PK coincidem, mas isto é impossível, pois PX não intercepta AB. Portanto, o ângulo YPQ não é maior que o ângulo XPQ (analogamente se verifica que o ângulo XPQ não é maior que YPQ), logo, podemos concluir que YPQ = XPQ.

Modelo de Poincaré para a Geometria de Lobatchevsky

Na seção anterior, vimos o início do desenvolvimento da geometria não euclidiana, mas, com o propósito de obtermos algumas conclusões importantes, veremos o modelo de Poincaré da geometria de Lobatchevsky.

Consideremos um círculo fixo C de raio 1 no plano Euclidiano. Seja E o conjunto dos pontos

interiores do círculo C.

O plano de Poincaré-Lobatchevsky será determinado pelo conjunto E.

Um círculo C' é ortogonal a C, se suas tangentes nos pontos de interseção forem perpendiculares. Uma reta deste plano será:

- a interseção dos pontos de um círculo qualquer com o conjunto E.
- a interseção do conjunto E com o diâmetro de C.

Postulado. Para cada dois pontos de E existe exatamente uma reta.

Necessitamos estabelecer um modo de conhecer a distância entre dois pontos e a medida angular entre duas retas.

Dados dois pontos X, Y pertencentes a C ou a E, seja XY a distância euclidiana usual, note que, se R, S, T e U estão como indica a figura 3, então R e S não são pontos do nosso plano.

Usaremos estas quatro distâncias TS, TR, US, UR para definir uma nova distância d(T,U), neste plano E:

$$d(T, U) = \ln \left| \frac{TR/TS}{UR/US} \right|$$

Assim podemos estabelecer a função:

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

Dada uma reta, seja U um ponto sobre a reta, então um ponto T qualquer sobre a reta será dado por:

$$f(T) = \ln \left| \frac{TR/TS}{UR/US} \right|$$

Seja $x = f(T)$ e $y = f(V)$, então temos:

$$|x - y| = \left| \ln \frac{TR/TS}{UR/US} - \ln \frac{VR/VS}{UR/US} \right| = \ln \left| \frac{TR/TS}{VR/VS} \right|$$

Logo, temos $|x - y| = d(T, V)$, assim podemos definir uma função medida angular do seguinte modo, dadas duas retas em E (figura 4), definiremos o ângulo (no sentido euclidiano), usando dois segmentos tangentes partindo do ponto A que é a interseção das duas retas.

Figura 4

Uma questão puramente técnica seria provar que no conjunto E , munido das definições de distância entre dois pontos e da medida angular de duas retas, são válidos todos os postulados da geometria euclidiana, exceto o 5º postulado de Euclides.

Neste modelo de geometria, seja por exemplo uma reta L que não passa pelo ponto P (centro do círculo), então através de P existe um número infinito de retas que são paralelas a L (figura 5).

Como consequência deste último resultado, a geometria de Lobatchevsky também é chamada de geometria hiperbólica, que está representada no modelo de Poincaré.

Figura 5

Daremos a seguir três teoremas da geometria hiperbólica bastante diferentes dos análogos da geometria euclidiana.

- 1) Nenhum quadrilátero é um retângulo. De fato, se um quadrilátero possui três ângulos retos, o quarto ângulo deverá ser sempre agudo.
- 2) Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos será sempre menor que 180° .
- 3) Não existem dois triângulos semelhantes.

Cada um destes três teoremas caracteriza a geometria hiperbólica.

Na geometria hiperbólica, temos uma consequência curiosa em relação a nosso espaço físico. O espaço físico pode ser hiperbólico, se, por exemplo, somamos as medidas dos ângulos internos de um triângulo e chegamos ao resultado de $179^\circ 59' 59,999''$, então a diferença entre 180° e esta medida é de $0,001''$. Este erro não seria devido a um equívoco de leitura das medidas (este erro é da ordem de $0,0003''$), e nos levaria a concluir que o espaço físico é hiperbólico.

Por outro lado, nenhuma medida por exata que seja demonstrará que o espaço físico é realmente euclidiano, pois todas as leituras das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre implicam em algum erro, logo, temos duas possibilidades:

- 1) Ou o postulado das paralelas não é válido no espaço físico.
- 2) Ou a verdade acerca do espaço físico nunca poderá ser conhecida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- MOISE, E. E. *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*. Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1968.
- KLINE, Morris. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Dias*, III. Madrid: Alianza Editorial, 1992.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.